Université Hassan 1
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2016-2017
Filière: SMA/SM
Module: Analyse
Responsable: N.MRHARDY

Examen de rattrapage
Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Exercice 1.

(1) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a \leq b$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

(2) Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On pose

$$\alpha = \inf A \quad \text{et} \quad B = A \cap]-\infty, \alpha + 1]$$

Montrer que $\inf A = \inf B$

(3) Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup\{|x-y|, (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

Exercice 2.

(1) Montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

(2) Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} H_n$

(3) Pour n entier naturel non nul, on pose

$$u_n = H_n - \ln(n) \quad et \quad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

(a) Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).
(b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite γ.
(c) Montrer que $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (γ est appelée la constante d'Euler).

Problème.
On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \arcsin(\sin 2x)$$

(1) (a) Etudiez la parité et la périodicité de φ.
(b) Montrez que

$$\varphi(x) = 2x \quad \text{pour} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

et

$$\varphi(x) = \pi - 2x \quad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(2) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

(a) Justifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|2x| \leq 1 + x^2$. Précisez les cas d'égalité.
(b) Déduisez de la question précédente le domaine de définition de f.
(c) Etudiez la parité de f.
(d) Pout tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, exprimez $\frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)}$ en fonction de $\sin(t)$ puis déduisez que

$$f(\tan t) = \varphi(t)$$

(e) Exprimez, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ à l'aide de φ et de $\arctan$.
(f) Déduisez des questions précédentes les variations de f sur $\mathbb{R}$.
(g) Dressez le tableau de variations de f en précisant ses limites en $\pm\infty$

(3) (a) Calculez $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.
(b) Donnez les équations des tangentes aux points d'abscisses 0, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
(c) Déterminez les limites $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$.